الأولى سلك باكالوريا

مسالك العلوم التجريبية وعلوم التكنولوجيات الميكانيكية

# مبادئ في المنطق Notions de logiques

**القدرات المنتظرة**

تعرف عبارة.تحديد قيمة حقيقة عبارة. تعرف نفي عبارة . تعرف عطف وفصل واستلزام وتكافؤ عبارتين . توظيف العمليات على المكممات والعبارات .التعرف على الاستدلالات الرياضية (الاستدلال بالخلف .الاستدلال بالعكس الاستدلال بفصل الحالات .الاستدلال بالتكافؤ الاستدلال بالترجع . توظيف الاستدلالات الرياضية)

## I. تعـــــاريف ومصــــــطلحات

### 1 - العبارة – الدالة العبارية

#### ا - تعريف

**العبارة في المنطق هي كل نص رياضي يحمل معنى يكون إما صحيحا أو خاطئا**

**مثال :** $2=3$ عبارة خاطئة

$\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ عبارة خاطئة

$2\neq 5$ عبارة صحيحة

#### ب- تعريف

**الدالة العبارية في المنطق هي كل نص رياضي يحتوي على متغير ينتمي إلى مجموعة معينة ويصبح عبارة كلما عوضنا هذا المتغير بعنصر محدد من هده المجموعة .**

نرمز للدالة العبارية ب $P(x)$.

Brahim Ajghaider

### د- ملاحظة

إذا كان لدينا متغيرين $x$ و $y$ نكتب $P(x;y)$ ونكتب

$P(x;y;z)$ أو $P(x;y;z;k)$ اذا كان أكثر من متغيرين

## 2 - المكممات les quantificateurs

لتكن $P(x)$ دالة عبارية و $E$ مجموعة فارغة

- العبارة $P(x)$ $(\exists x \in E)$: التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان يوجد على الأقل عنصر واحد من $E$ يحقق $P(x)$ ونقرا يوجد على الأقل عنصر $x$ من $E$ يحقق $P(x)$ ويسمى هذا الرمز المكمم الوجودي

- العبارة $(\forall x \in E)P(x)$ التي تكون صحيحة إذا وفقط إذا كان جميع عناصر المجموعة $E$ تحقق الخاصية $P(x)$ ونقرا مهما يكن $x$ من $E$ ويسمى هذا المكمم الكوني

**مثال1 :**

باستعمال المكممات اكتب العبارات التالية

1 . لكل عدد صحيح طبيعي $n$ يوجد عدد صحيح طبيعي $m$ بحيث $n = 2m$

2 . لكل عددين حقيقيين $x$ و $y$ يوجد عدد صحيح طبيعي $n$ بحيث $x - y = m$

**مثال2** اكتب العبارات التالية بدون مكممات

-1 $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}): x^2 + y^2 = 1$

-2 $(\forall x \in \mathbb{Z})(\exists y \in \mathbb{Z})\, y \prec x$

- 3 $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(\exists m \in \mathbb{Z})\, nx \prec m$

Brahim Ajghaider

### ملاحظة

- المكمم الكوني ( مهما يكن) .الرمز $\forall$
- المكمم الوجودي ( يوجد عنصر من) .الرمز$\exists$
- المكمم الوجودي للوحدانية $\exists!$

➢ إذا كانت المكممات من نفس الطبيعة فا ن ترتيبها ليس له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة

➢ أما إذا كانت من طبيعة مختلفة فترتيبها له أهمية في تحديد المعنى الذي تحمله العبارة المكممة

## II. العمليـــــــــات المنـــــــطقيـــــــة

### 1. النـــــفـــي المنطقي négation

#### أ - تعـــــريف

نفي العبارة $P$ هي العبارة التي تكون خاطئة إذا كانت $P$ صحيحة وصحيحة إذا كانت $P$ خاطئة ونرمز لها ب $\overline{P}$ أو $7P$

ويعبر عن النفي بجدول الحقيقة التالي

| $P$ | $\overline{P}$ |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |

مع العدد 0 يعني عبارة خاطئة و 1 يعني عبارة صحيحة $(V=1)et(F=0)$

( نفي العبارة الصحيحة هي الخاطئة والعكس بالعكس)

#### ب - نـــــفي عبارة مكــمـــمة

- نفي العبارة $(\exists x \in E)\ \ P(x)$ هي: $(\forall x \in E)P(x)$
- نفي العبارة $(\forall x \in E)P(x)$ هي $(\exists x \in E)\ \ P(x)$:

▪ (نفي المكمم الكوني هو الوجودي والوجودي هو الكوني )

Brahim Ajghaider

**ج -* تطبيق 1** لتكن العبارة التالية $P:\forall x\in\mathbb{R}^{+};\sqrt{x}\prec x$

1- حدد نفي العبارة $P$

2- بين أن $\overline{P}$ عبارة صحيحة

3- هل $P$ عبارة صحيحة

## 2. الفـــــصل المنـطـقي disjonction

### أ - تعريف

فصل عبارتين $P$ و $Q$ هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت على **الأقل إحدى العبارتين** $P$ و $Q$ صحيحة ونرمز له ب $P$ أو $Q$

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

| $P$ | $Q$ | $P$ أو $Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

### ب- ملاحظة

**الفصل تبادلي** ( $P$ أو $Q$ ) و ( $Q$ أو $P$ ) لهما نفس المعنى

*** تطبيق 2** لتكن العبارة الآتية $P:\quad \forall x\in\mathbb{R}^{*}\left(x^{2}\geq x \Rightarrow x^{2}+1\succ 0\right)$

1 - بين أن العبارة $P$ صحيحة

2- حدد نفي العبارة $P$

**تطبيق 3*** حدد حقيقة العبارات التالية

1 - $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$ أو $(\forall x\in\mathbb{R}):x^{2}+1\neq 0$

2 - $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}$ أو $(\forall x\in\mathbb{R}):x^{2}+1=0$

Brahim Ajghaider

## 3.العـــطـــف المنطقي conjonction

أ تعريف

عطف عبارتين $P$ و $Q$ هو عبارة تكون صحيحة إذا كانت $P$ و $Q$ صحيحتان معا ونرمز له ب $P$ و $Q$

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

| P | Q | QوP |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

ملاحظة العطف تبادلي ( $P$ و $Q$ ) او ( $Q$ و $P$ ) لهما نفس المعنى

## 4.الاســـــتـلـزام المنطقي implication

ا- تعـــريف

انطلاقا من العبارتين $P$ و $Q$ نحصل على العبارة نفي $P$ أو $Q$ $(\overline{P}Q)$

التي تكون خاطئة إذا وفقط إذا كانت $P$ صحيحة و $Q$ خاطئة

العبارة $(\overline{P}Q)$ تسمى استلزام $P$ و $Q$ و نكتب $P \Rightarrow Q$

ونقرا ( $P$ تستلزم $Q$ ) أو (إذا كانت $P$ فان $Q$ ) أو (من $P$ نستنتج $Q$ )

ونعبر عنه بجدول الحقيقة

| P | Q | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 |

ملاحظة العبارتان $(P \Rightarrow Q)$ و $(Q \Rightarrow P)$ لتحملان نفس المعنى

Brahim Ajghaider

**تطبيق4**

بين انه لكل $x$ من $\mathbb{R}$ ولكل $y$ من $\mathbb{R}$ فان $1+xy=x+y \Rightarrow (x=1\ y=1)$

**تطبيق5**

بين أن $\forall x \in [0;1[\ \forall y \in \mathbb{R}: y \neq 1 \Rightarrow 1+xy \neq x+y$

**تطبيق6** حدد حقيقة العبارات التالية

$P:\left(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0 \Rightarrow \sqrt{2} \prec \sqrt{3}\right)$

$\left(\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0 \Rightarrow 2 \prec \sqrt{3}\right)$

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \prec \sqrt{5} \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{2}$

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \prec \sqrt{5} \Rightarrow 7 \in \mathbb{N}$

## 5.التكافؤ المنطقي équivalence

### ا- تعريف

تكافؤ العبارتين $P$ و $Q$ هو العبارة $(P \Rightarrow Q\ P \Leftarrow Q)$ التي تكون صحيحة إذا كانت $P$ل و $Q$ نفس قيم الحقيقة ونرمز للتكافؤ ب $P \Leftrightarrow Q$ ونقرا) لدينا $P$ إذا وفقط إذا كانت ) أو $P$ تكافئ $Q$ )

ونعبر عنه بجدول الحقيقة التالي

| P | Q | $P \Leftrightarrow Q$ |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 |

Brahim Ajghaider

## III. القـــــــوانـــين المنـــــطـقية

**1 - تعريف**

**كل عبارة مكونة من عدة عبارات A و b و C ... مرتبطة بينها بالعمليات المنطقية وتكون صحيحة مهما كانت A و b و C ... العبارات تسمى قانونا منطقيا**

**2 قوانين موركان**

$$7(A\ \text{و}\ B) = 7A\ \text{أو}\ 7B \qquad \text{و} \qquad 7(A\ \text{أو}\ B) = 7A\ \text{و}\ 7B$$

$$A\ \text{و}\ (B\ \text{أو}\ C) = (A\ \text{و}\ B)\ \text{أو}\ (A\ \text{و}\ C)$$

$$A\ \text{أو}\ (B\ \text{و}\ C) = (A\ \text{أو}\ B)\ \text{و}\ (A\ \text{أو}\ C)$$

**3 قانون التكافؤات المتتالية**

$$(A \Leftrightarrow B)\ \text{و}\ (A \Leftrightarrow C) \Rightarrow (B \Leftrightarrow C)$$

**4. قانون فصل الحالات**

$$(A \Rightarrow C)\ \text{و}\ (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A\ \text{أو}\ B) \Rightarrow C$$

**5. قانون بالخلف**

$$(7q \Rightarrow 7p) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$$

**6 مبدأ الترجع***

**البرهان بالترجع يعتمد على ثلاث عناصر أساسية**

**التحقق : نتحقق أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد الأول**

**الافتراض: نفترض أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد $n$**

**البرهان: نبرهن أن العبارة صحيحة بالنسبة للحد $n+1$**

Brahim Ajghaider